Koszulity in BGG category $\mathcal{O}$

阿部 紀行 *

特に断らなければベクトル空間は $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする．ベクトル空間 V に対してその双対空間を V^* とかく．

$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 環とする．Lie 環の表現とは，ベクトル空間 V と Lie 環としての準同型 $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の組であった．ただし $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を（より一般に $\mathbb{C}$ 代数 A を）$[X,Y] = XY - YX$ により Lie 環と見なしている．この $\mathbb{C}$ 代数から Lie 環への関手は左随伴 U を持ち，$U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環と呼ばれる．具体的には，$U(\mathfrak{g})$ は以下のように構成される：

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\langle XY - YX - [X,Y]\rangle \mid X, Y \in \mathfrak{g}\rangle_{\text{両側イデアル}}.$$

ただし $T(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のテンソル代数である．左随伴であることは容易にわかる．$\mathfrak{g}$ の表現の圏と左 $U(\mathfrak{g})$ 加群の圏は圏同型である．

$X_1, \dots, X_n$ を $\mathfrak{g}$ の基底とする．$T(\mathfrak{g})$ の元は $X_{i_1} \cdots X_{i_r}$ を基底とするが，$U(\mathfrak{g})$ においては $i > j$ ならば $X_i X_j = X_j X_i + [X_j, X_i]$ と入れ替えられるので，$i_1 \le \cdots \le i_r$ を満たすような $X_{i_1} \cdots X_{i_r}$ が $U(\mathfrak{g})$ を生成することがわかる．実はこれが基底になるというのが Poincaré-Birkhoff-Witt（以下 PBW）の定理である．

定理 1（PBW） $\{X_{i_1} \cdots X_{i_r} \mid i_1 \le \cdots \le i_r\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底．

以下しばらく $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ とする．これはトレースが 0 の二次正方行列からなる Lie 環である．次の E, H, F が $\mathfrak{g}$ の基底を与える．

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは次の関係式を満たす．

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H.$$

前二つの関係式から次がわかる．

* 東京大学 大学院数理科学研究科

補題 2　V を $\mathfrak{g}$ の表現であるとし，$v \in V$ が H の作用に関して固有値 λ の固有ベクトルであるとする．

(1) Ev は 0 でなければ H の固有値 $\lambda+2$ の固有ベクトル．
(2) Fv は 0 でなければ H の固有値 $\lambda-2$ の固有ベクトル．

証明　(1) $HEv = (HE-EH)v + EHv = [H,E]v + EHv = 2Ev + EHv = 2Ev + \lambda Ev = (\lambda+2)Ev$. (2) も同様．　□

一般の $\mathfrak{g}$ の表現を全て考えるのは大きすぎて難しいので，考える表現を制限する．次の部分圏は Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG76] により導入された．

定義 3　$U(\mathfrak{g})$ 加群の圏の充満部分圏 $\mathcal{O}$ を次で定義する．$M \in \mathcal{O}$ であるとは，

(1) M は $U(\mathfrak{g})$ 加群として有限生成．
(2) M への H の作用は半単純．
(3) $\mathrm{wt}(M)$ を H の固有値全体とした時，ある $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ が存在し，任意の $\lambda \in \mathrm{wt}(M)$ に対してある i が存在して $\lambda_i - \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して M における H の固有値 λ の固有空間を M_λ と書く．固有値のことをウェイト，固有空間のことをウェイト空間ともいう．ホモロジカルな性質をまとめておく．（自明ではない．証明は例えば Humphreys による教科書 [Hum08] を参照せよ．）

定理 4
- $\mathcal{O}$ の全ての対象の長さは有限．
- $\mathcal{O}$ は十分豊富な射影的対象と入射的対象を持つ．
- 大域次元は有限．（今の場合は 2.）
- 双対関手 D が存在する．D は $D(M) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_\lambda^* \subset \prod_{\lambda \in \mathbb{C}} M_\lambda^* = M^*$ に $\mathfrak{g}$ の作用を $(X\varphi)(m) = \varphi({}^t X m)$ で定めたものとして定義される．任意の既約表現 $L \in \mathcal{O}$ に対して $D(L) \simeq L$ である．

条件 (3) と補題 2 から次がわかる：任意の $v \in M$ に対してある $k \geq 0$ が存在し，$E^k v = 0$. 特に 0 でない $M \in \mathcal{O}$ は $Ev = 0$ となる $0 \neq v \in M$ を含む．さらに H の作用が半単純であることから，v は H の固有ベクトルとしてとれる．このようなベクトルを最高ウェイトベクトルといい，圏 $\mathcal{O}$ を調べる際に重要な役割を果たす．

定義 5　$v \in M$ がウェイト λ の最高ウェイトベクトルであるとは，$Hv = \lambda v$，$Ev = 0$ を満たすこと．

別の言葉遣いとして次がある．$\lambda \in \mathrm{wt}(M)$ が最高ウェイトであるとは実部が $\mathrm{wt}(M)$ の

中で最大であることで，また最高ウェイト λ に対して M_λ の元を最高ウェイトベクトルという．こちらの方が「最高」という意味合いはわかりやすい．この意味で最高ウェイトベクトルならば，定義 5 の意味でも最高ウェイトベクトルであるが，逆は成り立たない．本稿では定義 5 の定義を採用する．

$\mathfrak{b} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E$ とおく．これは $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数となり，Borel 部分代数と呼ばれる．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $H \mapsto \lambda$, $E \mapsto 0$ は $\mathfrak{b}$ の 1 次元表現を与える．これを $\mathbb{C}_\lambda$ と書く．（表現空間は $\mathbb{C}$ としておく．）すると，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, M) \simeq \{M$ のウェイト λ の最高ウェイトベクトル$\}$ が容易にわかる．（射は $\varphi \mapsto \varphi(1)$ である．）左辺は $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda, M)$ と同型である．ここに現れた加群は Verma 加群と呼ばれ，重要な役割を果たす．

$$\Delta(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

を（最高ウェイトが λ の）Verma 加群という．

PBW の定理から $U(\mathfrak{g})$ の基底として $\{F^a H^b E^c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ がとれる．よって $\Delta(\lambda)$ は $F^a H^b E^c \otimes 1$ で生成されるが，$F^a H^b E^c \otimes 1 = F^a \otimes H^b E^c 1$ である．このことから $\Delta(\lambda)$ は $F^k \otimes 1$ を基底にしていることがわかる：

$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{k \geq 0} F^k (1 \otimes 1).$$

定義から $1 \otimes 1 \in \Delta(\lambda)$ は H の固有値 λ の固有ベクトルなので，$F^k(1 \otimes 1)$ は固有値 $\lambda - 2k$ の固有ベクトルである．つまり，$\Delta(\lambda)_\mu$ は $\mu \notin \lambda - 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば 0 で，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\Delta(\lambda)_{\lambda - 2k} = \mathbb{C}F^k(1 \otimes 1)$ である．この記述から次がわかる．

補題 6　$\Delta(\lambda) \in \mathcal{O}$.

任意の $M \in \mathcal{O}$ はあるウェイト λ に関する 0 でない最高ウェイトベクトルを持ち，よって $\Delta(\lambda) \xrightarrow{\neq 0} M$ がある．特に任意の単純対象はある λ に関して $\Delta(\lambda)$ の商である．

命題 7　$\Delta(\lambda)$ の既約商はただ一つ．

証明　真の部分加群の和がまた全体でないことを示せばよい．$N \subset \Delta(\lambda)$ を $\Delta(\lambda)$ の部分加群とする．N はウェイト空間の直和に分解するが，$\Delta(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}(1 \otimes 1)$ を含んでしまうと全体を生成するので，$N_\lambda = 0$．従って $N \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$ であり，よってそのような部分加群の和も同じ条件を満たすから全体にはならない．□

この唯一の既約商を $L(\lambda)$ と書く．$L(\lambda)$ は $L(\lambda)_\lambda \neq 0$ かつ $L(\lambda)_\mu \neq 0$ ならば $\lambda - \mu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で特徴付けられて，よって λ が異なれば別の既約表現を与える．よって，

$\{L(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ が既約表現の同型類全部を与える．双対 D は $D(M)_\lambda = (M_\lambda)^*$ を満たすので，$D(L(\lambda)) \simeq L(\lambda)$ である．

少し Verma 加群の構造をみておく．次の Casimir 元を使うのが便利である．

$$\Omega = H^2 + 2EF + 2FE = H^2 + 2H + 4FE \in U(\mathfrak{g}).$$

補題 8　$Z(U(\mathfrak{g})) = \mathbb{C}[\Omega]$.

証明　Ω が中心に入ることだけ示す．例えば

$$\begin{aligned} E\Omega - \Omega E &= EH^2 - H^2E + 2E^2F - 2FE^2 \\ &= (EH - HE)H + H(EH - HE) + 2E(EF - FE) + 2(EF - FE)E \\ &= -2EH - 2HE + 2EH + 2HE = 0. \end{aligned}$$

$F\Omega = \Omega F$，$H\Omega = \Omega H$ も同様． □

$1\otimes 1 \in \Delta(\lambda)$ に対して $H(1\otimes 1) = \lambda(1\otimes 1)$, $E(1\otimes 1) = 0$ だから, $\Omega(1\otimes 1) = (\lambda^2+2\lambda)(1\otimes 1)$．$\Delta(\lambda)$ は $1\otimes 1$ で生成され, Ω は $U(\mathfrak{g})$ の元と可換なので Ω は $\Delta(\lambda)$ 上に $\lambda^2+2\lambda$ 倍で作用する．$\Omega = H^2 - 2H + 4EF$ と書き換えると，$\Omega(F^{k-1}(1\otimes 1)) = (\lambda^2+2\lambda)F^{k-1}(1\otimes 1)$ および $H(F^{k-1}(1\otimes 1)) = (\lambda - 2(k-1))F^{k-1}(1\otimes 1)$ から

$$(\lambda^2+2\lambda)(F^{k-1}(1\otimes 1)) = ((\lambda-2(k-1))^2 - 2(\lambda-2(k-1)))(F^{k-1}(1\otimes 1)) + 4EF^k(1\otimes 1)$$

整理して

$$EF^k(1\otimes 1) = k(\lambda - (k-1))F^{k-1}(1\otimes 1)$$

を得る．

λ が非負整数でなければこれは常に 0 であり，このことから $\Delta(\lambda)$ の既約性がわかる．($\Delta(\lambda)$ の 0 でない部分加群はある H の固有ベクトルを含むのである $F^k(1\otimes 1)$ を含む．これに E^k を作用させると $1\otimes 1$ のゼロでない定数倍の元ができ，これは $\Delta(\lambda)$ を生成する．）よって $L(\lambda) = \Delta(\lambda)$.

一方，$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば $EF^{\lambda+1}(1\otimes 1) = 0$ となる．これを次のような図で描くことがよくある．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "E"] & F^{\lambda+1}(1\otimes 1) \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[r, bend left, "E=0"] & F^{\lambda}(1\otimes 1) \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[r, bend left, "E"] & \cdots \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[r, bend left, "E"] & 1\otimes 1 \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[r, bend left, "E=0"] & {}
\end{tikzcd}$$

これにより，$\bigoplus_{k=\lambda+1}^{\infty}\mathbb{C}F^k(1\otimes 1)\subset\Delta(\lambda)$ は部分加群であることが見て取れる．$F^{\lambda+1}(1\otimes 1)$ は H の固有値 $\lambda-2(\lambda+1)=-\lambda-2$ の固有ベクトルで，よってこの部分加群は $\Delta(-\lambda-2)$ と同型であり，また残りが $L(\lambda)$ と同型：$L(\lambda)=\Delta(\lambda)/\Delta(-\lambda-2)$.

Ω は $\Delta(\lambda)$ に $\lambda^2+2\lambda$ 倍で作用するので，$L(\lambda)$ にも $\lambda^2+2\lambda$ 倍で作用する．よって $\mathrm{Ext}^1(L(\lambda),L(\mu))\neq 0$ ならば $\lambda^2+2\lambda=\mu^2+2\lambda$，よって $\lambda=\mu,-\mu-2$ である．$\mathcal{O}_\lambda$ をその既約成分が $L(\lambda)$ と $L(-\lambda-2)$ のみからなる対象全体とすると，$\mathcal{O}=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}/\sim}\mathcal{O}_\lambda$ である．ただし $\lambda\sim-\lambda-2$.

$\lambda\notin\mathbb{Z}$ の時はさらに $\mathrm{Ext}^1(L(\lambda),L(-\lambda-2))=0$ となることが示せ，$\mathcal{O}_\lambda$ は半単純である．また $\lambda=-1\iff\lambda=-\lambda-2$ の時も $\mathcal{O}_\lambda$ は半単純となる．よって λ が -1 以外の整数の時の $\mathcal{O}_\lambda$ が面白い．

以下 $\lambda\neq-1$ を整数とする．必要ならば λ を $-\lambda-2$ に取り替えて $\lambda\geq 0$ としてよい．このとき $\mathcal{O}_\lambda$ 内の既約表現は $L(\lambda)$ と $L(-\lambda-2)$ である．おのおのの射影被覆を $P(\lambda)$, $P(-\lambda-2)$ とし，$A=\mathrm{End}(P(\lambda)\oplus P(-\lambda-2))$ とおく．$\mathcal{O}_\lambda$ は有限生成 A 加群の圏と圏同値であり，また A は擬遺伝環となる．$\Delta(\lambda)$ は標準加群である．$\nabla(\lambda)=D(\Delta(\lambda))$ とおくとこれは余標準加群となる．次だけみておこう．

補題 9　$\Delta(\lambda)\in\mathcal{O}_\lambda$ は射影的.

証明　$L(\lambda)$ と $L(-\lambda-2)$ のウェイトの分布から，$M\in\mathcal{O}_\lambda$ に対して $\mathrm{wt}(M)\subset\lambda-2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ となることがわかる．よって M はその実部が λ の実部より大きいウェイトを持たないので，ウェイト λ のウェイト空間の元は全て最高ウェイトベクトルである．従って $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda),M)\simeq M_\lambda$．$M\mapsto M_\lambda$ は完全なので $\Delta(\lambda)$ は射影的. □

次が $\mathfrak{sl}_2$ における [BGS96] の主定理である．

定理 10　ある A の次数付けで，A が Koszul かつ $A^!\simeq A$ となるものがある．

$P(\lambda)$ と $P(-\lambda-2)$ は次のような構造を持っている．（下が部分加群．）

$$P(\lambda)=\Delta(\lambda)=\begin{array}{|c|}\hline L(\lambda)\\ \hline L(-\lambda-2)\\ \hline\end{array},\quad P(-\lambda-2)=\begin{array}{|c|}\hline \Delta(-\lambda-2)\\ \hline \Delta(\lambda)\\ \hline\end{array}=\begin{array}{|c|}\hline L(-\lambda-2)\\ \hline L(\lambda)\\ \hline L(-\lambda-2)\\ \hline\end{array}$$

これを使えば今の場合の A を計算することも容易であるが，ここでは $\mathrm{End}(P(-\lambda-2))$

を計算してみよう．まず

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{End}(P(-\lambda-2)) &= (P(-\lambda-2):L(-\lambda-2))\\ &= (\Delta(\lambda):L(-\lambda-2)) + (\Delta(-\lambda-2):L(-\lambda-2))\\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

である．

$c=\Omega-(\lambda^2+2\lambda)$ とおく．これは $\Delta(\lambda)$ には 0 倍で作用するのだが，$P(-\lambda-2)$ にはそうではないことを示すことができる．つまり，

$$c\colon P(-\lambda-2) = \boxed{\begin{array}{c}\Delta(-\lambda-2)\\ \hline \Delta(\lambda)\end{array}} \twoheadrightarrow \Delta(-\lambda-2) \hookrightarrow \Delta(\lambda) \hookrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\Delta(-\lambda-2)\\ \hline \Delta(\lambda)\end{array}} = P(-\lambda-2)$$

となっていて，$\operatorname{End}(P(-\lambda-2)) = \mathbb{C}\mathrm{id}\oplus\mathbb{C}c$ および $c^2=0$．よって，

$$\operatorname{End}(P(-\lambda-2)) \simeq \mathbb{C}[c]/(c^2)$$

を得る．これは $\deg(c)=2$ により次数環になっていることに注意する．

定理が正しければ，$A=\operatorname{End}(P(\lambda)\oplus P(-\lambda-2)) \simeq E(A) = \operatorname{Ext}^*(L(\lambda)\oplus L(-\lambda-2))$ となることに注意する．定理の証明はまずこれを示すことから始まる．$\operatorname{Proj}(\mathcal{O}_\lambda)$ を $\mathcal{O}_\lambda$ の射影的対象からなる圏，$\operatorname{Semisimple}(\mathcal{O}_\lambda)$ を O_λ の半単純対象からなる圏に，$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Semisimple}(\mathcal{O}_\lambda)} = \operatorname{Ext}^*$ で射を定めたものとする．

定理 11 圏同値 $\operatorname{Proj}(\mathcal{O}_\lambda)\simeq\operatorname{Semisimple}(\mathcal{O}_\lambda)$ で，$P(\lambda)\mapsto L(-\lambda-2)$, $P(-\lambda-2)\mapsto L(\lambda)$ となるものが存在する．

証明は両辺を $\operatorname{mod}(\mathbb{C}[c]/(c^2))$ で「記述」することで与えられる．$\operatorname{Proj}(\mathcal{O}_\lambda)$ 側は次のようになる．$\operatorname{End}(P(-\lambda-2))\simeq\mathbb{C}[c]/(c^2)$ を使って $\mathbb{V}\colon \operatorname{Proj}(\mathcal{O}_\lambda)\to\operatorname{mod}(\mathbb{C}[c]/(c^2))$ を

$$\mathbb{V}(P) = \operatorname{Hom}(P(-\lambda-2), P)$$

と定める．

補題 12 $\mathbb{V}$ は忠実充満で，$\mathbb{V}(P(\lambda))\simeq\mathbb{C}$，$\mathbb{V}(P(-\lambda-2))\simeq\mathbb{C}[c]/(c^2)$.

特に $\mathbb{V}(P(\lambda))$ も $\mathbb{V}(P(-\lambda-2))$ も次数加群となる．よって $A\simeq\operatorname{End}_{\mathbb{C}[c]/(c^2)}(\mathbb{V}(P(\lambda))\oplus\mathbb{V}(P(-\lambda-2)))$ も次数環になる．また，これから A が λ によらないことがわかる．この次数の取り方はいろいろあるが，$\mathbb{C}[c]/(c^2)$ は ±1 次に次数を持つように調整しておく．こ

のようにすると，例えば自己双対的になる．また，以下で述べる幾何学的記述とも整合的となる．

Semisimple($\mathcal{O}_\lambda$) 側は幾何学的な記述を経由する．実はすでにこの片鱗は現れている．上に出てきた $\mathbb{C}[c]/(c^2)$ は $\mathbb{P}^1$ のコホモロジー環 $H^*(\mathbb{P}^1)$ と同型である．この観察を次のような形でバージョンアップさせる．

まず，Beilinson-Bernstein 対応と Riemann-Hilbert 対応の組み合わせとして得られる有名な圏同値を少しいじって得られる次の圏同値から始める．$\mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(\mathbb{P}^1)$ を $\mathbb{P}^1$ 上の偏屈層であって，$\{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$ および $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ 上定数なものからなる圏とする．（$B^\vee$ は SL_2 の双対群の Borel 部分群で，その軌道上定数なものを考えるという意味でつけているが，とりあえず今は飾りと思っていてもらってよい．）

定理 13　$\mathcal{O}_0 \simeq \mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(\mathbb{P}^1)$.

よって $\mathrm{Semisimple}(\mathcal{O}_\lambda) \simeq \mathrm{Semisimple}(\mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(\mathbb{P}^1))$ である．（$\mathcal{O}_0$ が $\mathcal{O}_\lambda$ に変わってしまったが，すでに見た通り λ によらないことに注意する．）$L(\lambda)$，$L(-\lambda-2)$ に対応する偏屈層を IC_s，IC_e とおく．これは交叉複体と呼ばれる，偏屈層の理論から定義できる対象である．今の場合は，IC_e は $\{0\}$ 上の定数層の 0 拡張で，IC_s は $\mathbb{P}^1$ 上の定数層を -1 次のところにおいた複体である．添え字の $\{e, s\}$ は Weyl 群の元のつもりだが，とりあえず気にしなくてよい．

さらに $\mathcal{F} \in \mathrm{Semisimple}(\mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(\mathbb{P}^1))$ に対して

$$\mathbb{H}(\mathcal{F}) = H^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})$$

とおく．これは次数付き $H^*(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{C}[c]/(c^2)$ 加群になる．

定理 14　$\mathbb{H}$: $\mathrm{Semisimple}(\mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(\mathbb{P}^1)) \to \mathrm{mod}(\mathbb{C}[c]/(c^2))$ は忠実充満で，$\mathbb{H}(\mathrm{IC}_s) = (\mathbb{C}[c]/(c^2))(1)$，$\mathbb{H}(\mathrm{IC}_e) = \mathbb{C}$.

ただし，$(\mathbb{C}[c]/(c^2))(1)$ における (1) は次数ずらしを表し，今の場合 $(\mathbb{C}[c]/(c^2))(1)$ には $\dim(\mathbb{C}[c]/(c^2))(1)_{\pm 1} = 1$ となる次数付けがされている．一般に IC_s のような交叉複体は自己双対的であり，よって $\mathbb{H}(\mathrm{IC}_s)$ も自己双対的であるが，これと整合的である．

これにより，$\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_\lambda) \simeq \mathrm{Semisimple}(\mathcal{O}_\lambda)$ がわかった．ここから A の Koszul 双対性を示すには次の二つの方法がある．

(1) $x, y \in \{e, s\}$ に対して $\dim \mathrm{Ext}^i(\mathrm{IC}_x, \mathrm{IC}_y)$ は今の場合は簡単に計算できる．この計算結果が Koszul 性の数値的判定法を満たすことを示す．
(2) 実は $E(A) \simeq A$ から A が Koszul であることが示せる [BGS96, Lemma 3.9.2].

以上の定理の一般化についてこれは n 次正方行列からなる Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ の時に述べる．（一般の簡約 Lie 環に対しても同じように拡張できる．）$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ を対角行列からなる（可換な）部分 Lie 環とする．E_{ij} を行列単位とする．$e_i \colon \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ を (i,i) 成分をとる線型写像とすると，

$$[H, E_{ij}] = (e_i - e_j)(H)E_{ij}$$

が $H \in \mathfrak{t}$ について成り立つことが計算するとわかる．$\alpha_{ij} = e_i - e_j$ とおく．

M を $\mathfrak{g}$ 加群とする．$m \in M$ がウェイト $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ のウェイトベクトルであるとは，$Hm = \lambda(H)m$ が $H \in \mathfrak{t}$ に対して満たされることである．今書いた式から，$m \in M$ がウェイト $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ のウェイトベクトルならば，$E_{ij}m$ はウェイト $\lambda + \alpha_{ij}$ のウェイトベクトルである．0 でないウェイト λ のウェイトベクトルが存在する時，λ を M のウェイトという．$\mathrm{wt}(M) \subset \mathfrak{t}^*$ を M のウェイト全体からなる集合とする．$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して M_λ をウェイト λ のウェイトベクトル全体とする．また $\mathfrak{t}^*$ 内の順序を $\lambda - \mu \in \sum_{i<j} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_{ij}$ の時 $\lambda \geq \mu$ と定める．

定義 15　$\mathfrak{g}$ 加群の充満部分圏 $\mathcal{O}$ を次で定める：$M \in \mathcal{O}$ であるとは

(1) M は有限生成 $U(\mathfrak{g})$ 加群．
(2) M は $\mathfrak{t}$ 加群として半単純．つまり $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{t}^*} M_\lambda$．
(3) ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathfrak{t}^*$ が存在し，$\lambda \in \mathrm{wt}(M)$ ならばある i が存在して $\lambda \leq \lambda_i$．

$\mathfrak{sl}_2$ の場合と同様，$\mathfrak{u} = \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}E_{ij}$ は $M \in \mathcal{O}$ に局所冪零に作用する，つまり任意の $m \in M$ に対して，ある N が存在し，任意の $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{u}$ に対して $X_1 \cdots X_N m = 0$．

定理 16　$\mathcal{O}$ の全ての対象は有限の長さを持ち，また $\mathcal{O}$ は十分豊富な射影的対象，入射的対象を持つ．$\mathcal{O}$ の大域次元は有限（実際には $n(n-1)$）である．

Verma 加群も同様に定義される．$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して，一次元の $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$ 加群 $\mathbb{C}_\lambda$ を $H + X \in \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$ が $\lambda(H)$ 倍で作用するとして定義する．Verma 加群は

$$\Delta(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

により定義される．次の証明は $\mathfrak{sl}_2$ の場合と同様．

補題 17　$\Delta(\lambda)$ は唯一の既約商 $L(\lambda)$ を持ち，$\mathcal{O}$ の単純対象は同型を除いて $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{t}^*\}$．

$\mathfrak{sl}_2$ の場合は $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(U(\mathfrak{g}))$ は Ω で生成されていた．$\mathfrak{gl}_n$ の場合はもっと多くの生成元が必要になる．$Z(U(\mathfrak{g}))$ は Harish-Chandra 同型により記述される．

$\overline{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{i>j} \mathbb{C}E_{ij}$ とおくと，$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$ である．PBW の定理から，$U(\mathfrak{g})$ の元は abc, $a \in U(\overline{\mathfrak{u}})$，$b \in U(\mathfrak{t})$，$c \in U(\mathfrak{u})$ の和で書かれる．a, c を定数項とそれ以外にわけると，$U(\mathfrak{g})$ の元は $U(\mathfrak{t})$ の元と $\overline{\mathfrak{u}}U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{u}$ の和で書かれる．$z \in Z(U(\mathfrak{g}))$ を $z = h + x$ とこの形の和で書いておく．このとき（$H \in \mathfrak{t}$ に対して $[H, z] = 0$ となることを使えば）$x \in \overline{\mathfrak{u}}U(\mathfrak{g})\mathfrak{u}$ となることもわかる．（正規化されていない）Harish-Chandra 準同型 $\gamma'\colon Z(U(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{t})$ を $\gamma'(z) = h$ で定める．さらに $\rho = (1/2)\sum_{i<j} \alpha_{ij} \in \mathfrak{t}^*$ とおいて，$\mathfrak{t} \ni H \mapsto H - \rho(H) \in U(\mathfrak{t})$ により誘導される $U(\mathfrak{t}) \to U(\mathfrak{t})$ との合成を γ とおく．成分の置換により S_n を $\mathfrak{t}$ に作用させ，$U(\mathfrak{t})$ にも作用させることとする．$\mathfrak{t}$ は可換なので $U(\mathfrak{t})$ も可換で，対称代数 $S(\mathfrak{t})$ と一致することに注意しておこう[1)]．$U(\mathfrak{t})^{S_n}$ を S_n 不変な元からなる部分代数とする．これは対称多項式環である．

定理 18（[Hum08, 1.10 Theorem]）　$\gamma\colon Z(U(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{t})^{S_n}$ は同型．

γ を Harish-Chandra 同型という．

例 19　$n = 2$ の時を考える．$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $H = H_1 - H_2$．$\Omega = H^2 + 2H + 4FE$ で，$4FE \in \overline{\mathfrak{u}}U(\mathfrak{g})\mathfrak{u}$ なので $\gamma'(\Omega) = H^2 + 2H$．$\rho(H) = (1/2)\alpha_{12}(H) = 1$ なので，$\gamma(\Omega) = (H-1)^2 + 2(H-1) = H^2 - 1 = (H_1 - H_2)^2 - 1$ となりこれは H_1 と H_2 の対称多項式である．$\mathfrak{sl}$ から $\mathfrak{gl}$ にしたことで．$Z(U(\mathfrak{g}))$ の生成元が一つ増えていて，それは単位行列 $H_1 + H_2$ である．$\gamma(H_1 + H_2) = H_1 + H_2$ も対称多項式で，$H_1 + H_2$ と $(H_1 - H_2)^2 - 1$ は二変数の対称多項式環を生成する．

次は定義からすぐわかる：$z \in Z(U(\mathfrak{g}))$ は $\Delta(\lambda)$ に（よって $L(\lambda)$ にも）$(\lambda+\rho)(\gamma(z))$ 倍で作用する．従って，上の定理と合わせれば $\mathrm{Ext}^1(L(\lambda), L(\mu)) \neq 0$ ならば $\lambda = w(\mu+\rho) - \rho$ となる $w \in S_n$ が存在することがわかる．これに基づき次のように定義する．まず S_n の $\mathfrak{t}^*$ への新しい作用を $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ と定める．そして $\mathcal{O}_\lambda$ を組成因子が $\{L(w \cdot \lambda) \mid w \in S_n\}$ のみであるような充満部分圏とする．このとき $\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{t}^*/(S_n, \cdot)} \mathcal{O}_\lambda$ である．

さらに $\mathrm{Ext}^1(L(\lambda), L(\mu)) \neq 0$ ならば $\lambda - \mu \in \sum_{i \neq j} \mathbb{Z}\alpha_{ij}$ であることをも示せるので，この分解はさらに細かく分解できる．ここでは，最も分解できない場合に注目しよう．$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ が整であるとは，任意の $w \in S_n$ に対して $w\lambda - \lambda \in \sum_{i \neq j} \mathbb{Z}\alpha_{ij}$ となることとする．これは $\lambda = \sum_i \lambda_i e_i$ と書いたとき $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$ となることと同値である．以下整な $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して $\mathcal{O}_\lambda$ を考えることにする．整でない $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に関しても同様の記述が可能であるが，さらに記号が必要になるので省略する．

1）　関手 S は $\mathbb{C}$ 代数の圏からベクトル空間への圏への忘却関手の左随伴である．

必要ならば λ を適当な $w \in S_n$ に関して $w \cdot \lambda$ に取り替えて $\lambda + \rho = \sum_i \lambda_i e_i$ と書いたとき $\mathrm{Re}(\lambda_1) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}(\lambda_n)$ を満たすとしてよい（ので以下そうする）．このとき，λ は $\{w \cdot \lambda \mid w \in S_n\}$ 内で $\mathfrak{t}^*$ に定められた順序に関して最大元であり，また最小元は $w_0 \cdot \lambda$, ただし $w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ である．各 $w \in S_n$ に対して $P(w \cdot \lambda)$ を $L(w \cdot \lambda)$ の射影被覆とする．

まずは λ が正則である，つまり $\mathrm{Stab}_{(S_n, \cdot)}(\lambda)$ が自明になる場合を考える．$A = \mathrm{End}(\bigoplus_{w \in S_n} P(w \cdot \lambda))$ とおく．$\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathrm{mod}(A)$ である．次が [BGS96] の主定理.

定理 20　A は Koszul になるような次数環の構造を持ち，$A^! \simeq A$.

注意 21
- 右辺は「$\mathfrak{sl}_n$ の双対」の圏 $\mathcal{O}$ を定める環と見なす方が自然である．
- さらに強く A は標準 Koszul 環となる．

重要な役割を果たすのが $P(w_0 \cdot \lambda)$ (big projective) である．$Z(U(\mathfrak{g})) \to \mathrm{End}(P(w_0 \cdot \lambda))$ を作用から得られる射とする．$U(\mathfrak{t})_+^{S_n}$ を定数項のない S_n 不変な元とし，$\langle U(\mathfrak{t})_+^{S_n} \rangle$ をそれにより生成されるイデアルとする．

定理 22　図式

$$\begin{tikzcd}
 & Z(U(\mathfrak{g})) \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma'"'] & \mathrm{End}(P(w_0 \cdot \lambda)) \arrow[d, no head, "\wr"] \\
U(\mathfrak{t}) \arrow[r, "\mathfrak{t} \ni H \mapsto H + \lambda(H)"'] & U(\mathfrak{t}) \arrow[r, two heads] & U(\mathfrak{t})/\langle U(\mathfrak{g})_+^{S_n} \rangle
\end{tikzcd}$$

を可換にする同型 $\mathrm{End}(P(w_0 \cdot \lambda)) \simeq U(\mathfrak{t})/\langle U(\mathfrak{t})_+^{S_n} \rangle$ が存在する．

$C = U(\mathfrak{t})/\langle U(\mathfrak{t})_+^{S_n} \rangle$ とおく．これは $\deg \mathfrak{t} = 2$ により次数環の構造を持つ．$\mathbb{V}\colon \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_\lambda) \to \mathrm{mod}(C)$ を $\mathbb{V}(M) = \mathrm{Hom}(P(w_0 \cdot \lambda), M)$ と定める．これは Soergel の $\mathbb{V}$ 関手と呼ばれることがある．

定理 23　$\mathbb{V}$ は忠実充満．

$G^\vee = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とし，$B^\vee \subset G^\vee$ を上半三角行列からなる部分群とする．$G^\vee$ の Lie 環は $\mathfrak{gl}_n$ であり，$\mathfrak{t} \subset \mathrm{Lie}(G^\vee)$ であるが，そうではなくて $\mathfrak{t}^\vee = \mathfrak{t}^*$ とおいて成分を使って $\mathfrak{t}^\vee \subset \mathrm{Lie}(G^\vee)$ と見なす．（つまり $\mathfrak{t}^* \ni \sum \lambda_i e_i \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Lie}(G^\vee)$ とする．）次は Borel による古典的な結果である．

定理 24　次数付き環としての同型 $H^*(G^\vee/B^\vee) \simeq C$ がある．

例 25　$n = 2$ とし，例 19 の記号を使う．$U(\mathfrak{t}) = \mathbb{C}[H_1, H_2]$ であり，$\langle U(\mathfrak{t})_+^{S_2} \rangle$ は定数項のない対称多項式で生成される．$c = \Omega - (\lambda^2 + 2\lambda)$ とおいていたことを思い出そう．$Z(U(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{t}) \xrightarrow{H \mapsto H + \lambda(H)} U(\mathfrak{t})$ による c の像は $(H + \lambda)^2 + 2(H + \lambda) - (\lambda^2 + 2\lambda)H^2 + 2(\lambda + 1)H \equiv 2(\lambda + 1)H \pmod{\langle U(\mathfrak{t})_+^{S_2} \rangle}$ である．すでにみたように $\mathrm{End}(P(w_0 \cdot \lambda)) \simeq \mathbb{C}[c]/(c^2)$ だったので，λ が -1 でない整数であったことに注意すれば確かに定理が成立していることがわかる．

各 $w \in S_n$ を，変数の置換により $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ と見なすことで $S_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と見なす．すると Bruhat 分解 $G^\vee/B^\vee = \bigsqcup_{w \in S_n} B^\vee w B^\vee / B^\vee$ が成り立つ．$G^\vee/B^\vee$ を旗多様体という．

例 26　$n = 2$ とする．GL_2 は $\mathbb{P}^1$ に一次分数変換により作用する：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

この作用は推移的であり，$\infty \in \mathbb{P}^1$ の固定点が $B^\vee$ となる．よって $G^\vee/B^\vee \ni gB^\vee \mapsto g\infty \in \mathbb{P}^1$ により $G^\vee/B^\vee \simeq \mathbb{P}^1$ である．S_2 の単位元を e，そうでない元を s とおくと，$B^\vee e B^\vee/B^\vee \simeq \{\infty\}$，$B^\vee s B^\vee / B^\vee \simeq \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ である．

一般の n に対しては次のように記述できる．

$$X = \{0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n \mid V_0, \ldots, V_n \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の部分ベクトル空間}\}$$

とおく．$g(V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n) = (gV_0 \subsetneq \cdots \subsetneq gV_n)$ により $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は X に作用し，これは推移的である．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とした時，$V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{C}e_i$ の定める X の点を $x_0 = (V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n)$ とすると，x_0 の固定点は $B^\vee$ に一致し，よって $X \simeq G^\vee/B^\vee$ となる．$n = 2$ の時は $\mathbb{C}^2$ の中の一次元部分ベクトル空間全体であるので，$\mathbb{P}^1$ になる．

$\mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/B^\vee)$ を偏屈層であって，各 $w \in S_n$ に対して $G^\vee/B^\vee$ 上の $B^\vee w B^\vee/B^\vee$ 上では定数なものからなる圏とする．また，$\mathcal{O}^\vee$ を $\mathrm{Lie}(G^\vee)$ の圏 $\mathcal{O}$ とし，$\mathcal{O}_0^\vee$ を $0 \in \mathfrak{t}$ に対して同様に定義する．

定理 27　圏同値 $\mathcal{O}_0^\vee \simeq \mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/B^\vee)$ が存在する[2)]．

$L(w_0 w^{-1} \cdot 0)$ に対応する偏屈層を IC_w とする．これは $B^\vee w B^\vee/B^\vee$ 上では $\mathbb{C}[\dim(B^\vee w B^\vee/B^\vee)]$ と同型になる交叉複体である．$\mathbb{H}$: $\mathrm{Semisimple}(\mathrm{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/B^\vee)) \to \mathrm{gr}(C)$ を $\mathbb{H}(\mathcal{F}) = H^*(G^\vee/B^\vee, \mathcal{F})$ と定める．($\mathrm{gr}(C)$ は有限生成次数付き C 加群のなす圏.)

2)　Riemann-Hilbert 対応，Beilinson-Bernstein 対応 [BB81] に Soergel [Soe86] による圏同値を組み合わせて得られる．

定理 28 $\mathbb{H}$ は忠実充満で，次数付けを忘れると $\mathbb{V}(P(w\cdot\lambda))\simeq\mathbb{H}(\mathrm{IC}_w)$.

特に A は λ によらない[3]．$\lambda=0$ の時を考えれば $E(A)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i(\bigoplus_{x\in S_n}L(x\cdot\lambda),\bigoplus_{x\in S_n}L(x\cdot\lambda))\simeq A$ を得る．これから A が Koszul であることを示すには $\mathfrak{sl}_2$ の場合と同様に次の二つの方法がある．

(1) $x,y\in S_n$ に対して $\dim\mathrm{Ext}^i(\mathrm{IC}_x,\mathrm{IC}_y)$ は Kazhdan-Lusztig によるアルゴリズムにより計算ができる．これと Koszul 性の数値的判定法を組み合わせる．
(2) 一般に次数付き有限次元 $\mathbb{C}$ 代数 $A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ において，A_0 は半単純であるとする．もし $E(A)\simeq A$ ならば A は Koszul である．

$\mathrm{End}(P(w_0\cdot\lambda))$ の計算や $\mathbb{V}$，$\mathbb{H}$ の忠実充満性は簡単ではない．射影加群側の定理の証明には変形の理論を使う．$\lambda_i-\lambda_j$ が常に整数でなければ $\mathcal{O}_\lambda$ は半単純となり，$\mathcal{O}_\lambda$ の射影加群の構造は自明である．ただ一つの $i<j$ に対して $\lambda_i-\lambda_j\in\mathbb{Z}$ となっているような場合は「SL_2 の場合」に近く，直接計算で $\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_\lambda)$ がわかる．一般の場合は変形を使いこの場合に帰着する．元々は Soergel [Soe90] により示された定理であるが，Fiebig の [Fie06] により整理された議論がある（ただし Kac-Moody Lie 環の場合に一般化されている）．$\mathbb{H}$ の方は IC の茎が parity vanishing を持っていることがキーである．原論文 [BGS96] を参照せよ．

注意 29 A の次数構造を考慮し，A の有限生成次数付き加群からなる圏を $\widetilde{\mathcal{O}}_0$ とおくと，これは $\mathcal{O}_0$ の「次数付き版」となり，次数を忘れる関手 $\widetilde{\mathcal{O}}_0\to\mathcal{O}_0$ が存在する．既約加群 $L(w\cdot 0)$，標準加群 $\Delta(w\cdot 0)$，直既約射影加群 $P(w\cdot 0)$ はそれぞれ $\widetilde{\mathcal{O}}_0$ 上にリフトする．リフトの仕方は次数のずらし分の不定性があるが，$L(w\cdot 0)$ のリフト $\widetilde{L}(w\cdot 0)$ は次数 0 に集中しているように，$\Delta(w\cdot 0)$ のリフト $\widetilde{\Delta}(w\cdot 0)$ と $P(w\cdot 0)$ のリフト $\widetilde{P}(w\cdot 0)$ は組成因子に $\widetilde{L}(w\cdot 0)$ を含むようにとる．$M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i\in\widetilde{\mathcal{O}}_0$ に対して $M(k)_i=M_{i+k}$ により次数ずらし (k) を定義することができる．

$\widetilde{\mathcal{O}}_0$ の Grothendieck 群 $K^0(\widetilde{\mathcal{O}}_0)$ を考える．これは $q^{1/2}[M]=[M(-1)]$ により $\mathbb{Z}[q^{1/2},q^{-1/2}]$ 加群の構造を持つ．Kazhdan-Lusztig 予想により，$\Delta(w\cdot\lambda)$ における既約表現の重複度は Kazhdan-Lusztig 多項式の 1 における値で記述されることが知られているが，この $\widetilde{\mathcal{O}}_0$ を使うと，Kazhdan-Lusztig 多項式そのものに表現論的意味を与えることができる．具体的には次の通りである．$P_{x,y}$ を Kazhdan-Lusztig 多項式とする．このとき，$K^0(\widetilde{\mathcal{O}}_0)$ において $[\widetilde{\Delta}(x\cdot 0)]=\sum_{y\in S_n}q^{(\ell(x)-\ell(y))/2}P_{x,y}(q)[\widetilde{L}(y\cdot 0)]$.

Koszul 双対 κ は $D^b(\widetilde{\mathcal{O}}_0)$ の自己同型を与える．一方，$\mathcal{O}_0$ の標準的な双対関手

3) この定理の証明は両辺を C 加群の言葉により特徴付けて示す．特にその特徴付けは λ によらないため，偏屈層を考えずとも $\mathbb{V}(P(w\cdot\lambda))$ は λ によらないことは証明できる．

D は $\widetilde{\mathcal{O}}_0$ 上の双対関手 D にのび，やはり $D(L(w \cdot 0)) \simeq L(w \cdot 0)$ を満たす．κ と D との合成を考えると，Koszul 環の理論から $\kappa(D(\widetilde{L}(x \cdot 0))) = \widetilde{P}(w_0 x^{-1} \cdot 0)$ であり，さらに標準 Koszul 環であることから $\kappa(D(\widetilde{\Delta}(x \cdot 0))) = \widetilde{\Delta}(w_0 x^{-1} \cdot 0)$ である．$\kappa(D(q^{-1/2}[M])) = [\kappa(D(M(1)))] = [\kappa((DM)(-1))] = [(\kappa(D(M)))(1)[-1]] = -q^{-1/2}[\kappa(D(M))]$ となることから，さっきの組成列の式に $\kappa \circ D$ を作用させると，$[\widetilde{\Delta}(w_0 x^{-1} \cdot 0)] = \sum_{y \in S_n} (-1)^{\ell(x)-\ell(y)} q^{(\ell(y)-\ell(x))/2} P_{x,y}(q^{-1})[\widetilde{P}(w_0 y^{-1} \cdot 0)]$ を得る．（ここで，$P_{x,y}$ が多項式であることを使った．）一方 $(\widetilde{P}(x \cdot 0) : \widetilde{\Delta}(y \cdot 0)(k)) = \dim \mathrm{Hom}(\widetilde{P}(x \cdot 0) : D(\widetilde{\Delta}(y \cdot 0))(k)) = [\widetilde{\Delta}(y \cdot 0)(k) : \widetilde{L}(x \cdot 0)] = [\widetilde{\Delta}(y \cdot 0) : \widetilde{L}(x \cdot 0)(-k)]$ なので，$[\widetilde{P}(y \cdot 0)] = \sum_{z \in S_n} q^{(\ell(y)-\ell(z))/2} P_{z,y}(q^{-1})[\widetilde{\Delta}(z \cdot 0)]$．これをさっきの式に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{\Delta}(w_0 x^{-1} \cdot 0)] \\
&= \sum_{y,z \in S_n} (-1)^{\ell(z)-\ell(y)} q^{(\ell(y)-\ell(x))/2} P_{x,y}(q^{-1}) P_{w_0 z^{-1}, w_0 y^{-1}}(q^{-1})[\widetilde{\Delta}(w_0 z^{-1} \cdot 0)]
\end{aligned}$$

を得るので，

$$\sum_{y \in S_n} (-1)^{\ell(x)-\ell(y)} P_{x,y}(q^{-1}) P_{w_0 z^{-1}, w_0 y^{-1}}(q^{-1}) = \delta_{xz}$$

を得る．これは Kazhdan-Lusztig 多項式の逆公式と呼ばれている公式であり，Koszul 双対性はこの公式に表現論的な意味を与える．

$\mathrm{Stab}_{(S_n,\cdot)}(\lambda)$ が非自明な時に定理がどう変わるかについて述べる．この場合も A は Koszul であるが，もはや自己双対にはならない．$W_\lambda = \mathrm{Stab}_{(W,\cdot)}(\lambda)$ とおく．これは次のように記述できる：$\lambda + \rho = \sum_i \lambda_i e_i$ とする．仮定から $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．$\mathrm{Re}(\lambda_1) = \cdots = \mathrm{Re}(\lambda_{n_1}) > \mathrm{Re}(\lambda_{n_1+1}) = \cdots = \mathrm{Re}(\lambda_{n_1+n_2}) > \mathrm{Re}(\lambda_{n_1+n_2+1}) = \cdots = \mathrm{Re}(\lambda_{n_1+\cdots+n_{r-1}}) > \mathrm{Re}(\lambda_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}) = \cdots = \mathrm{Re}(\lambda_{n_1+\cdots+n_r})$，$n = n_1 + \cdots + n_r$ となるように $n_1, \ldots, n_r$ をとると，W_λ は $\{1, \ldots, n_1\}, \{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}, \ldots, \{n_1 + \cdots + n_{r-1}+1, \ldots, n_1 + \cdots + n_r\}$ を保つ元からなる部分群に他ならなく，$S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_r}$ と同型である．S_n は C に自然に作用することに注意する．

定理 30 $Z(U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\gamma'} U(\mathfrak{t}) \xrightarrow{\mathfrak{t} \ni H \mapsto H + \lambda(H)} U(\mathfrak{t}) \twoheadrightarrow C$ の像は C^{W_λ} と一致し，図式

$$\begin{tikzcd}
Z(U(\mathfrak{g})) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{End}(P(w_0 \cdot \lambda)) \arrow[d, "\wr"] \\
& C^{W_\lambda}
\end{tikzcd}$$

を可換にする同型 $\mathrm{End}(P(w_0 \cdot \lambda)) \simeq C^{W_\lambda}$ が存在する．

同様に $\mathbb{V}\colon \operatorname{Proj}(\mathcal{O}_\lambda) \to \operatorname{mod}(C^{W_\lambda})$ を $\mathbb{V}(M) = \operatorname{Hom}(P(w_0 \cdot \lambda), M)$ により定義する．

定理 31 $\mathbb{V}$ は忠実充満．

幾何学側を述べる．$P^\vee = P^\vee_\lambda$ をその Levi 部分が $\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}$ となる $B^\vee$ を含む放物型部分群とし，$\operatorname{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/P^\vee)$ を同様に定義する．$G^\vee/P^\vee = \coprod_{w \in S_n/W_\lambda} B^\vee w P^\vee/P^\vee$ が成り立つ．

定理 32 $H^*(G^\vee/P^\vee) \simeq C^{W_\lambda}$.

$B^\vee w P^\vee/P^\vee$ 上で $\mathbb{C}[\dim(B^\vee w P^\vee/P^\vee)]$ となる交叉複体を $\mathrm{IC}_{P^\vee,w}$ とする．また関手 $\mathbb{H}\colon \operatorname{Semisimple}(\operatorname{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/P^\vee)) \to \operatorname{gr}(C^{W_\lambda})$ を $\mathbb{H}(\mathcal{F}) = H^*(G^\vee/P^\vee, \mathcal{F})$ と定める．

定理 33 $\mathbb{H}$ は忠実充満で，$\mathbb{H}(\mathrm{IC}_{P^\vee,w}) \simeq \mathbb{V}(P(w \cdot \lambda))$ が成り立つ．

よって $A \simeq \operatorname{Ext}^*(\bigoplus_{w \in S_n/W_\lambda} \mathrm{IC}_{P^\vee,w})$ を得る．

正則な場合と同様に $\operatorname{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/P^\vee)$ は圏 $\mathcal{O}$ の言葉で書き直せる．そのときに出てくるのが次の放物型圏 $\mathcal{O}$ である．

$(\mathcal{O}^\vee)_0^{P^\vee} \subset \mathcal{O}_0^\vee$ を次で定める：$M \in \mathcal{O}_0^\vee$ が $(\mathcal{O}^\vee)_0^{P^\vee}$ に入っているための必要十分条件は任意の $m \in M$ に対して $\dim U(\operatorname{Lie}(P^\vee))m < \infty$ となることである．定義から $\mathcal{O}^{B^\vee} = \mathcal{O}$ となっている．次はやはり Beilinson-Bernstein 対応，Riemann-Hilbert 対応から得られる圏同値をいじることで得られる．

定理 34 $(\mathcal{O}^\vee)_0^{P^\vee} \simeq \operatorname{Perv}_{(B^\vee)}(G^\vee/P^\vee)$.

よって次が従う [BGS96].

系 35 $Q \in (\mathcal{O}^\vee)_0^{P^\vee_\lambda}$ を最小の射影的生成対象とし，$A' = \operatorname{End}(Q)$ とする．このとき $E(A') \simeq A$ であり，A' は（よって A も）Koszul.

これを parabolic-singular duality と呼ぶ．さらに一般に，$(\mathcal{O}^\vee)_\mu^{P^\vee_\lambda}$ を考えることもできる．このとき次が成り立つ．

定理 36 $(\mathcal{O}^\vee)_\lambda^{P^\vee_\mu}$ と $(\mathcal{O}^\vee)_\mu^{P^\vee_\lambda}$ は Koszul 双対.

これは translation functor と Zuckerman functor の整合性から従う [RH04].

参考文献

[BB81] Alexandre Beĭlinson and Joseph Bernstein, *Localisation de g-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), no. 1, 15–18.

[BGG76] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand, *A certain category of* $\mathfrak{g}$*-modules*, Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 2, 1–8.

[BGS96] Alexander Beilinson, Victor Ginzburg, and Wolfgang Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 473–527.

[Fie06] Peter Fiebig, *The combinatorics of category* $\mathcal{O}$ *over symmetrizable Kac-Moody algebras*, Transform. Groups **11** (2006), no. 1, 29–49.

[Hum08] James E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category* $\mathscr{O}$, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[RH04] Steen Ryom-Hansen, *Koszul duality of translation- and Zuckerman functors*, J. Lie Theory **14** (2004), no. 1, 151–163.

[Soe86] Wolfgang Soergel, *Équivalences de certaines catégories de* $\mathfrak{g}$*-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986), no. 15, 725–728.

[Soe90] Wolfgang Soergel, *Kategorie* $\mathcal{O}$*, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 421–445.